KOMPLEKSNA ANALIZA

PAVLE PANDŽIĆ, 1. PREDAVANJE

Osnovni pojmovi i definicije.

U kompleksnoj analizi radimo s poljem kompleksnih brojeva

$$\mathbb{C} = \{z = x + yi \,\big|\, x, y \in \mathbb{R}\},$$

gdje je i imaginarna jedinica, $i^2 = -1$.

Kompleksne brojeve zbrajamo i množimo kao polinome:

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i;$$

$$(a + bi)(c + di) = ac + adi + bci + bdi^2 = (ac - bd) + (ad + bc)i.$$

Lako se provjerava da je uz ovako definirane operacije $\mathbb{C}$ polje.

Pri tome je neutral za zbrajanje $0 = 0 + 0i$;

broj suprotan broju $z = a + bi$ je $-z = -a - bi$;

neutral za množenje je $1 = 1 + 0i$;

multiplikativni inverz broja $z = a + bi \neq 0$ je

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{a + bi} = \frac{a - bi}{(a + bi)(a - bi)} = \frac{a - bi}{a^2 + b^2} = \frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{b}{a^2 + b^2}i.$$

Realne brojeve x i y nazivamo **realnim** i **imaginarnim dijelom** od $z = x + yi$ i označavamo ih s $\operatorname{Re} z$ i $\operatorname{Im} z$.

Konjugirani kompleksni broj broja $z = x + yi$ definiramo kao

$$\bar{z} = x - yi.$$

Jasno je da vrijedi

$$\operatorname{Re} z = \frac{1}{2}(z + \bar{z}), \quad \operatorname{Im} z = \frac{1}{2}(z - \bar{z}).$$

Modul ili apsolutnu vrijednost kompleksnog broja $z = x + yi$ definiramo s

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Skupove $\mathbb{C}$ i $\mathbb{R}^2$ identificiramo na uobičajeni način:

$$z = x + iy \in \mathbb{C} \leftrightarrow (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

To nam omogućava prikazivanje kompleksnih brojeva u ravnini.

Argument kompleksnog broja $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ definiramo kao realni broj $\varphi \in (-\pi, \pi]$ koji predstavlja veličinu kuta između pozitivnog dijela osi x i zrake iz ishodišta koja prolazi kroz z. Oznaka: $\varphi = \arg z$.

Lako se vidi da za svaki $z \neq 0$ vrijedi

$$x = \operatorname{Re} z = |z| \cos \varphi, \quad y = \operatorname{Im} z = |z| \sin \varphi,$$

pa je

$$z = x + iy = |z| \cos \varphi + i|z| \sin \varphi = |z| e^{i\varphi},$$

gdje smo uveli oznaku $e^{i\varphi} := \cos \varphi + i \sin \varphi$. (ovo je zasad samo oznaka, a kasnije ćemo vidjeti da je to stvarno vrijednost eksponencijalne funkcije na $i\varphi$.)

Ovaj zapis kompleksnog broja nazivamo trigonometrijskim zapisom. Za interval vrijednosti argumenta kompleksnog broja može se uzeti i neki drugi interval duljine 2π, npr. često se uzima $[0, 2\pi)$.

Pomoću identifikacije $\mathbb{C}$ i $\mathbb{R}^2$ možemo na $\mathbb{C}$ prenijeti sve topološke pojmove koje znamo na $\mathbb{R}^2$, kao što su udaljenost, kugle (krugovi), otvoreni i zatvoreni skupovi, kompaktni i povezani skupovi, te konvergencija nizova i neprekidnost funkcija.

Udaljenost točaka $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ dana je sa

$$|z_1 - z_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$

Vrijedi nejednakost trokuta:

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|, \quad \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}.$$

Otvoren krug s centrom u $z_0 \in \mathbb{C}$ radijusa $r > 0$ je skup

$$K(z_0, r) \stackrel{def}{=} \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < r\},$$

tj. skup svih kompleksnih brojeva z koji su udaljeni od z_0 za manje od r.

Zatvoren krug s centrom u $z_0 \in \mathbb{C}$ radijusa $r > 0$ je skup

$$\overline{K}(z_0, r) \stackrel{def}{=} \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| \leq r\}.$$

Kružnica s centrom u $z_0 \in \mathbb{C}$ radijusa $r > 0$ je skup

$$S(z_0, r) = \partial K(z_0, r) \stackrel{def}{=} \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| = r\}.$$

Očito je $S(z_0, r) = \{z = z_0 + re^{i\varphi} : \varphi \in [0, 2\pi)\}$.

Skup $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ je otvoren ako je ili prazan ili za svaku točku $z \in \Omega$ postoji $r_z > 0$ tako da je $K(z, r_z) \subseteq \Omega$.

Skup $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ je zatvoren ako je njegov komplement $\Omega^c = \mathbb{C} \setminus \Omega$ otvoren.

U ovim predavanjima Ω uvijek označava otvoren skup.

Skup $S \subseteq \mathbb{C}$ je ograničen ili omeđen ako postoji $M > 0$ tako da je $|z| \leq M$ za sve $z \in S$, to jest, $S \subseteq \overline{K}(0, M)$.

Skup $K \subseteq \mathbb{C}$ je kompaktan ako je zatvoren i ograničen.

Zatvoren krug i kružnica su primjeri kompaktnih skupova.

Ekvivalentno, skup K je kompaktan ako i samo ako za svaki njegov otvoren pokrivač postoji konačan potpokrivač.

Otvoren skup Ω u $\mathbb{C}$ je povezan ako se ne može napisati kao disjunktna unija dva otvorena neprazna skupa.

Vrijedi da je otvoren skup Ω povezan ako i samo ako je povezan putevima, tj. za svake dvije točke $z, w \in \Omega$ postoji neprekidno preslikavanje $\gamma : [a, b] \to \Omega$ (koje nazivamo putem) tako da $\gamma(a) = z$ i $\gamma(b) = w$.

Pri tome neprekidnost od γ znači da je γ neprekidno preslikavanje s $[a, b]$ u $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$.

Otvoren skup Ω koji je ujedno i povezan naziva se područjem.

Na primjer, svaki otvoren krug je područje. Unija dva disjunktna otvorena kruga nije područje, već samo otvoren skup kojemu su ta dva kruga komponente povezanosti.

Ukoliko Ω nije povezan, može se napisati na jedinstven način kao prebrojiva (moguće konačna) unija disjunktnih područja, koje nazivamo komponentama povezanosti od Ω.

Niz kompleksnih brojeva (z_n) konvergira prema kompleksnom broju z_0, pišemo $\lim_n z_n = z_0$, ako za svaki $\varepsilon > 0$ postoji prirodan broj n_ε (ovisan o ε) tako da vrijedi

$$n \geq n_\varepsilon \Rightarrow |z_n - z_0| < \varepsilon,$$

ili ekvivalentno

$$n \geq n_\varepsilon \Rightarrow z_n \in K(z_0, \varepsilon).$$

Ako je $z_n = x_n + iy_n, n \in \mathbb{N}$ i $z_0 = x_0 + iy_0$ tada vrijedi:

$$\lim_n z_n = z_0 \Leftrightarrow (\lim_n x_n = x_0 \text{ i } \lim_n y_n = y_0).$$

Na primjer, ako je $z_n = \dfrac{\sin n}{n} + i\dfrac{n^2+1}{2n^2-1}, n \in \mathbb{N}$ tada je

$$\lim_{n\to\infty} z_n = \lim_{n\to\infty} \frac{\sin n}{n} + i \lim_{n\to\infty} \frac{n^2+1}{2n^2-1} = \frac{1}{2}i.$$

U ovom će nas kolegiju prvenstveno zanimati kompleksne funkcije kompleksne varijable, odnosno funkcije $f : \Omega \to \mathbb{C}$, gdje je Ω otvoren skup u $\mathbb{C}$.

Takva funkcija f je neprekidna u $z_0 \in \Omega$ ako za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $\delta > 0$ tako da $K(z_0, \delta) \subseteq \Omega$ i

$$|z - z_0| < \delta \Rightarrow |f(z) - f(z_0)| < \varepsilon,$$

ili ekvivalentno

$$z \in K(z_0, \delta) \Rightarrow f(z) \in K(f(z_0), \varepsilon).$$

Funkcija f je neprekidna na Ω ako je neprekidna u svakoj točki skupa Ω.

Neprekidnost funkcije f u z_0 ekvivalentna je tome da za svaki niz (z_n) u Ω,

$$\lim_n z_n = z_0 \quad \Rightarrow \lim_n f(z_n) = f(z_0).$$

Neka je $f : \Omega \to \mathbb{C}$. Koristimo identifikaciju $z = x + yi = (x, y)$, te uvodimo oznake

$$u(x, y) = \text{Re } f(x + yi), \quad v(x, y) = \text{Im } f(x + yi).$$

Tako dobijemo funkcije

$$u, v : \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

koje nazivamo **realnim i imaginarnim dijelom od** f.

Pišemo

$$u = \text{Re } f, \quad v = \text{Im } f, \quad f = u + vi.$$

Funkciju f možemo shvaćati i kao funkciju $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ zadanu s

$$f : (x, y) \mapsto (u(x, y), v(x, y)).$$

Na primjer, neka je $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ zadana s $f(z) = z^2$. Tada je

$$f(x + yi) = (x + yi)^2 = x^2 - y^2 + 2xy\, i.$$

Dakle, $u(x, y) = x^2 - y^2$, $v(x, y) = 2xy$, pa je

$$f(x, y) = (x^2 - y^2, 2xy).$$

Iz tog prikaza je jasno da je riječ o neprekidnoj funkciji.

Na sličan način možemo definirati polinome $p : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$,

$$p(z) = a_n z^n + \cdots + a_1 z + a_0,$$

gdje je $n \in \mathbb{N}_0$, $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$.

Svaki je polinom neprekidna funkcija na $\mathbb{C}$, jer su mu realni i imaginarni dio polinomi u x i y.

Možemo definirati i racionalne funkcije kao kvocijente dva polinoma; one će biti neprekidne tamo gdje su definirane.

Derivabilnost funkcije.

Pojmovi derivabilnosti i derivacije funkcije $f : \Omega \to \mathbb{C}$ različiti su od pojmova diferencijabilnosti i diferencijala funkcije f shvaćene kao funkcije s $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ u $\mathbb{R}^2$ (te ćemo pojmove uskoro usporediti).

Definicija derivabilnosti funkcije $f : \Omega \to \mathbb{C}$ je analogna derivabilnosti realne funkcije realne varijable.

Neka je zadana funkcija $f : \Omega \to \mathbb{C}$ i $z_0 \in \Omega$. Funkcija f je **derivabilna** u točki z_0 ako postoji

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}. \tag{0.1}$$

Ukoliko taj limes postoji, označavamo ga s $f'(z_0)$ i nazivamo **derivacijom funkcije** f **u točki** z_0.

Funkcija f je **derivabilna na** Ω ako je derivabilna u svakoj točki skupa Ω. Još kažemo da je f **holomorfna na** Ω.

Uz zamjenu varijabli $z = z_0 + h$ limes u (0.1) ima oblik

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h}. \tag{0.2}$$

(Nekad je spretnije raditi s ovom formulom.)

U ovom će nas kolegiju zanimati samo funkcije koje su derivabilne na otvorenim skupovima u $\mathbb{C}$. Vidjet ćemo da takve funkcije imaju mnogo bolja svojstva nego diferencijabilne funkcije u realnoj analizi.

Primjer.

Izračunajmo, ako postoji, derivaciju funkcije $f(z) = z^2$ u proizvoljnoj točki $z_0 \in \mathbb{C}$.

Imamo

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{z \to z_0} \frac{z^2 - z_0^2}{z - z_0} = \lim_{z \to z_0} \frac{(z - z_0)(z + z_0)}{z - z_0} = \lim_{z \to z_0} (z + z_0) = 2z_0.$$

Svojstva derivacije.

Sljedeće se tvrdnje provjeravaju na isti način kao i kod realnih funkcija realne varijable:

Neka su $f, g : \Omega \to \mathbb{C}$ funkcije i $z_0 \in \Omega$. Tada vrijedi:

(i) Ako je f derivabilna u z_0, onda je f neprekidna u z_0.

Posebno, ako je f derivabilna na Ω onda je i neprekidna na Ω.

Zaista, ako postoji $\lim_{z\to z_0} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$ tada je

$$\lim_{z\to z_0} f(z)-f(z_0) = \lim_{z\to z_0} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}\cdot (z-z_0) = 0.$$

(ii) Ako su f i g derivabilne u z_0 tada:
(1) Za sve $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ je funkcija $\lambda f + \mu g$ derivabilna u z_0 i

$$(\lambda f + \mu g)'(z_0) = \lambda f'(z_0) + \mu g'(z_0).$$

(2) fg je derivabilna u z_0 i

$$(fg)'(z_0) = f'(z_0)g(z_0) + f(z_0)g'(z_0).$$

(3) Ako $g(z_0) \neq 0$, onda je $\dfrac{f}{g}$ derivabilna u z_0 i vrijedi

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(z_0) = \frac{f'(z_0)g(z_0) - f(z_0)g'(z_0)}{(g(z_0))^2}.$$

(iii) Neka je $g : \Omega_1 \to \mathbb{C}$, gdje je Ω_1 otvoren skup koji sadrži $f(\Omega)$. Ako je f derivabilna u točki z_0 i g derivabilna u $f(z_0)$, tada je $g\circ f$ derivabilna u z_0 i vrijedi

$$(g\circ f)'(z_0) = g'(f(z_0))f'(z_0).$$

Iz gornjih formula odmah slijedi da su polinomi derivabilne funkcije. Preciznije, ako je

$$f(z) = a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0,$$

gdje su $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$, tada je

$$f'(z) = n a_n z^{n-1} + (n-1)a_{n-1}z^{n-2} + \cdots + a_1.$$

Racionalne funkcije su također derivabilne na svojoj domeni.

Cauchy-Riemannovi uvjeti.

Sjetimo se da smo funkciju $f : \Omega \to \mathbb{C}$ pisali u obliku $f = u + iv$, gdje je $u = \operatorname{Re} f$ i $v = \operatorname{Im} f$. Također, funkcija f je u jednoznačnoj korespondenciji s funkcijom $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ zadanom s

$$f : (x,y) \mapsto (u(x,y), v(x,y)).$$

Prisjetimo se definicije diferencijabilnosti iz diferencijalnog računa funkcija više (realnih) varijabli:

Funkcija $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ je diferencijabilna u točki $(x_0, y_0) \in \Omega$ ako postoji linearan operator $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ takav da vrijedi

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{\|f(x,y) - f(x_0,y_0) - A(x - x_0, y - y_0)\|}{\|(x,y) - (x_0,y_0)\|} = 0.$$

Ako takav operator A postoji, onda je on jedinstven i naziva se diferencijalom funkcije f u (x_0, y_0).

Njegova matrica u standardnoj bazi je

$$\nabla f(x_0,y_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0) & \frac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0) \\ \frac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0) & \frac{\partial v}{\partial y}(x_0,y_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_x(x_0,y_0) & u_y(x_0,y_0) \\ v_x(x_0,y_0) & v_y(x_0,y_0) \end{pmatrix};$$

posebno, postoje parcijalne derivacije funkcija u i v u (x_0, y_0).

Drugim riječima, funkcija $f = (u, v) : \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ je diferencijabilna na Ω ako i samo ako u svakoj točki $(x_0, y_0) \in \Omega$ postoje parcijalne derivacije funkcija u i v, i vrijedi

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{\left\|f(x,y) - f(x_0,y_0) - \begin{pmatrix} u_x(x_0,y_0) & u_y(x_0,y_0) \\ v_x(x_0,y_0) & v_y(x_0,y_0) \end{pmatrix}(x - x_0, y - y_0)\right\|}{\|(x,y) - (x_0,y_0)\|} = 0.$$

S druge strane, funkcija $f : \Omega \to \mathbb{C}$ je diferencijabilna na Ω kao kompleksna funkcija kompleksne varijable ako i samo ako za svaki $z_0 \in \Omega$ postoji kompleksan broj $f'(z_0)$ takav da je

$$\lim_{z\to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = f'(z_0),$$

što je ekvivalentno sa

$$\lim_{z\to z_0} \frac{|f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z - z_0)|}{|z - z_0|} = 0.$$

Uz identifikaciju $z = (x, y)$ i $z_0 = (x_0, y_0)$, vidimo da su te dvije vrste diferencijabilnosti vrlo slične, jedino što u karakterizaciji kompleksne diferencijabilnosti ulogu diferencijala preuzima linearni operator kompleksnog množenja brojem $f'(z_0)$.

Uz identifikaciju $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ standardna baza prostora $\mathbb{R}^2$ postaje $(1, i)$, a operator množenja kompleksnim brojem $a + bi$ u toj bazi ima matricu

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}.$$

To odmah slijedi iz toga što je

$$(a + bi)1 = a + bi; \qquad (a + bi)i = -b + ai$$

i iz toga što se matrica pridružena operatoru A u bazi (e_j) dobiva tako da se u k-ti stupac stave koeficijenti vektora Ae_k u bazi (e_j).

Dakle (kompleksna) derivabilnost je ekvivalentna (realnoj) diferencijabilnosti, uz dodatni uvjet da je Jacobijeva matrica oblika

$$\begin{pmatrix} u_x(x_0,y_0) & u_y(x_0,y_0) \\ v_x(x_0,y_0) & v_y(x_0,y_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix},$$

pri čemu je $f'(z_0) = a + bi$. Dokazali smo

Teorem (Cauchy-Riemannovi uvjeti).

Neka je $f : \Omega \to \mathbb{C}$ funkcija, $z_0 \in \Omega$. Neka je $f = u + iv$.

Tada je f derivabilna u točki z_0 (tj. postoji limes (0.1)) ako i samo ako je funkcija $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ diferencijabilna u točki (x_0, y_0) i vrijede **Cauchy–Riemannovi uvjeti**:

$$u_x(x_0,y_0) = v_y(x_0,y_0),$$
$$u_y(x_0,y_0) = -v_x(x_0,y_0).$$

U tom slučaju vrijedi

$$f'(z_0) = u_x(x_0,y_0) + iv_x(x_0,y_0) = v_y(x_0,y_0) - iu_y(x_0,y_0).$$

Iz diferencijalnog računa funkcija više (realnih) varijabli znamo da je dovoljan uvjet diferencijabilnosti funkcije f na $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ postojanje i neprekidnost parcijalnih derivacija komponenata u i v na Ω.

Ako parcijalne derivacije još i zadovoljavaju Cauchy–Riemannove uvjete, onda gornji teorem povlači da je f derivabilna kao funkcija kompleksne varijable.

Na primjer, za funkciju $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) = z^2$ imamo

$$f(x,y) = (x^2 - y^2, 2xy), \quad \text{dakle} \quad u(x,y) = x^2 - y^2, \quad v(x,y) = 2xy.$$

Parcijalne derivacije

$$u_x(x,y) = 2x, \quad u_y(x,y) = -2y, \quad v_x(x,y) = 2y, \quad v_y(x,y) = 2x$$

postoje i neprekidne su na $\mathbb{R}^2$, pa je f diferencijabilna na $\mathbb{R}^2$.

Cauchy-Riemannovi uvjeti su zadovoljeni:

$$u_x(x,y) = 2x = v_y(x,y), \qquad u_y(x,y) = -2y = -v_x(x,y).$$

Prema tome, f je derivabilna na $\mathbb{C}$, i vrijedi

$$f'(z) = u_x(x,y) + iv_x(x,y) = 2x + i2y = 2z,$$

kao što smo i ranije zaključili direktnim računanjem derivacije.

Eksponencijalna funkcija.

Složeniji je primjer kompleksne eksponencijalne funkcije.

Ona je definirana tako da proširuje dobro poznatu realnu eksponencijalnu funkciju $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^x$:

$$\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \quad \exp(z) = \exp(x + iy) = e^x (\cos y + i \sin y) .$$

Ako je $z = x \in \mathbb{R}$ (tj. ako je $y = 0$) tada je

$$\exp(z) = \exp(x + i \cdot 0) = e^x (\cos 0 + i \sin 0) = e^x,$$

pa je restrikcija kompleksne eksponencijalne funkcije na $\mathbb{R}$ upravo realna eksponencijalna funkcija.

Često ćemo $\exp(z)$ označavati sa e^z.

Eksponencijalna funkcija je derivabilna na $\mathbb{C}$, i vrijedi $\exp'(z) = \exp(z)$. Naime, komponente funkcije $\exp$,

$$u(x, y) = e^x \cos y, \qquad v(x, y) = e^x \sin y$$

očito imaju neprekidne parcijalne derivacije na $\mathbb{C}$, pa je f diferencijabilna kao funkcija s $\mathbb{R}^2$ u $\mathbb{R}^2$.

Nadalje,

$$u_x(x, y) = e^x \cos y = v_y(x, y), \qquad u_y(x, y) = -e^x \sin y = -v_x(x, y),$$

pa su zadovoljeni CR uvjeti, dakle je f derivabilna kao funkcija sa $\mathbb{C}$ u $\mathbb{C}$. Štoviše, vrijedi

$$\exp'(z) = u_x(x, y) + iv_x(x, y) = e^x \cos y + ie^x \sin y = \exp(z).$$

Navedimo još neka svojstva eksponencijalne funkcije. Osnovna relacija

$$e^{z_1+z_2} = e^{z_1} e^{z_2}, \quad z_1, z_2 \in \mathbb{C},$$

slijedi direktno iz definicije, koristeći svojstva realne eksponencijalne funkcije kao i funkcija $\sin$ i $\cos$ (adicione formule).

Iz osnovne relacije odmah slijedi

$$e^{z_1-z_2} = \frac{e^{z_1}}{e^{z_2}}, \quad z_1, z_2 \in \mathbb{C},$$

i posebno

$$\frac{1}{e^z} = e^{-z}, \quad z \in \mathbb{C}$$

.

Nadalje, za svaki $z = x + iy \in \mathbb{C}$ vrijedi

$$|e^z| = |e^x(\cos y + i \sin y)| = e^x \sqrt{\cos^2 y + \sin^2 y} = e^x > 0.$$

Odavde zaključujemo da je

$$e^z \neq 0, \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

Dakle 0 nije u slici eksponencijalne funkcije, a iz definicije vidimo da svi ostali kompleksni brojevi jesu.

Naime, za $z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi) \neq 0$ vidimo da je

$$z = e^{\ln|z| + i\varphi}.$$

Prema tome, eksponencijalna funkcija je surjekcija na $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Uočimo još da je eksponencijalna funkcija periodična s periodom $2\pi i$, jer je

$$\begin{aligned} e^{z+2\pi i} &= e^{x+i(y+2\pi)} = e^x\left(\cos\left(y+2\pi\right) + i\sin\left(y+2\pi\right)\right) = \\ &= e^x\left(\cos y + i\sin y\right) = e^z, \quad \forall z \in \mathbb{C}. \end{aligned}$$

Prema tome, $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ nije injekcija, pa niti bijekcija.

Promotrimo sada ponašanje eksponencijalne funkcije na nekim podskupovima domene. Uzmimo $x_0 \in \mathbb{R}$, proizvoljan i fiksiran. Skup

$$\{x_0 + iy : y \in \mathbb{R}\}$$

je vertikalni pravac koji realnu os siječe u x_0. Što je slika tog pravca po eksponencijalnoj funkciji?

Iz

$$e^{x_0+iy} = e^{x_0}(\cos y + i\sin y), \quad y \in \mathbb{R}$$

slijedi da je to kružnica sa središtem u ishodištu radijusa e^{x_0}.

Prema tome, vertikalni pravci domene se preslikavaju u kružnice sa središtem u ishodištu.

Uzmimo sada $y_0 \in \mathbb{R}$, opet proizvoljan i fiksiran. Skup

$$\{x + iy_0 : x \in \mathbb{R}\}$$

je horizontalni pravac koji imaginarnu os siječe u iy_0.

Iz

$$e^{x+iy_0} = e^x(\cos y_0 + i\sin y_0), \quad x \in \mathbb{R}$$

slijedi da se ovaj pravac preslikava u polupravac (zraku) iz ishodišta (bez ishodišta) koja s pozitivnim dijelom realne osi čini kut y_0.

Prema tome, horizontalni pravci domene se preslikavaju u zrake iz ishodišta.

Iako smo već vidjeli da je $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ surjekcija, sada smo se još jednom u to uvjerili, naime, svim ovim polupravcima (kao i svim spomenutim kružnicama) popunjen je cijeli skup $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Štoviše, sada uočavamo i da je restrikcija eksponencijalne funkcije

$$\exp|_{\mathbb{R}\times\langle-\pi,\pi]} : \mathbb{R} \times \langle-\pi,\pi] \to \mathbb{C} \setminus \{0\}, \tag{0.3}$$

pri čemu je
$$\mathbb{R}\times\langle-\pi,\pi] = \{x+iy : x\in\mathbb{R}, y\in\langle-\pi,\pi]\},$$
surjekcija, jer su horizontalni pravci sadržani u domeni dovoljni da se točno jednom prekrije cijela kodomena $\mathbb{C}\setminus\{0\}$.

Štoviše vrijedi
$$e^z = e^w \Leftrightarrow z = w + 2\pi k,\ ke\in\mathbb{Z},$$
pa je stoga ova funkcija i bijekcija.

Odredimo inverz bijekcije $\exp : \mathbb{R}\times\langle-\pi,\pi]\to\mathbb{C}\setminus\{0\}$.

Za $z\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$ tražimo $w = u+iv\in\mathbb{R}\times\langle-\pi,\pi]$ tako da je $e^w = z$. Vrijedi

$$\begin{aligned}
e^w = z \quad &\Leftrightarrow \quad e^u e^{iv} = |z|e^{i\varphi}\\
&\Leftrightarrow \quad e^u = |z|; \quad e^{iv} = e^{i\varphi}\\
&\Leftrightarrow \quad u = \ln|z| \text{ i } v = \varphi,
\end{aligned}$$

dakle,
$$w = \ln|z| + i\varphi = \ln|z| + i\arg z.$$

Dobivena inverzna funkcija nije neprekidna: ako uzmemo niz točaka u IV kvadrantu koji teži prema -1, pripadni argumenti teže prema $-\pi$, dok je $\arg(-1) = \pi$.

Zato smanjujemo domenu eksponencijalne funkcije sa $\mathbb{R}\times\langle-\pi,\pi]$ na $\mathbb{R}\times\langle-\pi,\pi\rangle$, tj. izbacujemo rubni horizontalni pravac kroz $i\pi$.

To odgovara tome da se iz slike preslikavanja $\exp$, odnosno domene inverzne funkcije, izbaci negativni dio x-osi, odnosno sve točke s argumentom π.

Na taj način dolazimo do bijekcije

$$\exp|_{\mathbb{R}\times\langle-\pi,\pi\rangle} : \mathbb{R}\times\langle-\pi,\pi\rangle \to \mathbb{C}\setminus\{x\in\mathbb{R} : x\le 0\}. \tag{0.4}$$

čiji inverz ćemo nazivati logaritamskom funkcijom.

(Glavna grana) prirodnog logaritma je funkcija
$$\ln : \mathbb{C}\setminus\langle-\infty,0]\to\mathbb{R}\times\langle-\pi,\pi\rangle, \quad \ln(z) = \ln|z| + i\arg z.$$

Domena funkcije $\ln$ je kompleksna ravnina iz koje je izbačena jedna zraka iz ishodišta - negativni dio realne osi zajedno s ishodištem.

Kasnije ćemo vidjeti da je funkcija $\ln$ holomorfna na svojoj domeni, i da joj je derivacija jednaka $\frac{1}{z}$.

Naziv "glavna grana" ukazuje na to da smo mogli umjesto negativnog dijela realne osi izbaciti i neku drugu zraku iz ishodišta i analogno dobiti logaritamsku funkciju (tada bismo i argument morali redefinirati na neki drugi interval širine 2π). Ponekad će nam to biti vrlo korisno u dokazima.